森林計画に関する研究 : ファジィ理論の応用について

松下, 幸司

森林計画に関する研究
――ファジィ理論の応用について――

松 下 幸 司

A Model of a Forestry Planning Problem
——An Application of Fuzzy Sets Theory——

Koji MATSUSHITA

要　　旨

従来の収穫予定問題は人工林を対象に，その何等かの意味での収穫最大化を目指すモデルが一般的な形式であった。この限りにおいて，通常の線型計画モデルとそのために必要なデータ列は確定的なものであっても，相当程度分析可能であったように思われる。また，このような枠組みで発生する曖昧さは何等かの客観的な確率に還元することによってモデルに組み込むことが可能であったように思われる。しかし，このような確率概念による問題設定は，困難が生じている。

曖昧な数値や関係を扱う議論にファジィ理論があり，近年，急速に実用化が進んでいる。森林計画にこのファジィ理論を応用することにより，より現実に即したシステムを設計することができる。具体的には，以下の３つの利点をあげることができる。

第１に，画一的な人工林以外の森林（天然林や複層林など）のデータを無理に，従来の森林簿に当てはめるのは多くの問題点を有する。多様な森林資源の整備にあわせ，そのためのデータ管理方法に適している。

第２に，森林に関するデータは，必ずしも客観的なデータばかりとは限らない。すべての調査を実施すると，膨大なコストを必要とする。また，ただ１度しか発生しない事象や希望的観測などの主観的なデータも少なくない。ファジィ理論は，こうした曖昧さを取り入れる。

第３に，森林計画は制約条件，目的条件の区別が必ずしも明確ではない。また，制約条件，目的条件ともに必ずしも明確に表現できない場合が少なくない。こうした問題は，ファジィ制約，ファジィ目的下のファジィ意思決定問題として定式化できる。

1. はじめに

森林計画作成に必要な様々な調査データは必ずしも確定的な数値で表現できるとは限らない。ある小班の材積を推定する場合，その小班にどのような収穫表を適用するかを考えてみよう。最も近いと考えられるものを選び，その数値を採用するのであるが，いったん収穫表が採用されてしまうと，あとはこの数値が確かなものとして扱われる。つまり，該当する収穫表の調査地と全く同じものと見なされることを意味する。ある小班に，特定の収穫表を適用する段階で，非常に重要なデータ，すなわちどの程度，収穫表に近いのかは不明となる。いま，表１のような例を用

いて具体的に考えてみよう。

小班1について見てみると，面積は造林時に測量しているものの，現在の蓄積は不明で，収穫表から多分300 m³位であると推定される。標準伐期までには伐採したい。小班2は最近，毎木調査を実施しており正確な面積・材積がわかる，伐期は70年を計画している。小班3は奥の雑木林で台帳上は35 haとなっているが，実際は40～50 haと思われ，40年位で全部伐ってしまいたい。小班4はスギ・ヒノキ混交であるが他樹種も一部あり，針葉樹としておく。面積はかつて測量したのでわかっているが，蓄積は不明で，とりあえず長伐期を考える。小班5は奥のほうの伐採跡地で，放置していたため，現在どうなっているかわからない。従って，伐期も未定である。

表1　小班の概要

小班名	樹　種	面　積 (ha)	蓄　積 (m³／ha)	伐　期
1	ス　ギ	3.05	300程度	55年まで
2	ヒノキ	1.29	261	70年
3	雑	40～50	150以下	40年前後
4	針葉樹	6.44	不　明	長伐期
5	不　明	約　8	不　明	未　定

このような5つの小班からなる林班を例に取り上げてみよう。議論をより明確にするために，曖昧なデータを多く採用している。森林調査に，十分なコストをかけることができない場合には，通常はまずこの例のような一覧表を得ることになる。さて，次に，このような一覧表をどのようにデータ化するかである。これまで提案されている種々の計画法[1)2)3)]，特に線型計画法によって小班別収穫予定を樹立するためには，欠損値のないデータに加工しなければならない。「程度」「前後」といった情報の代わりに，確定的な数値に直される。また，「長伐期」では，何年なのかわからず具体的な数値の代入が要請される。「55年まで」というのも困り，低めに50年としておく等のデータ改変を必要とする。その結果，例えば表2のようなデータが得られるであろう。

このようなデータについて若干の集計を実施してみよう。蓄積合計は711 m³となるが，小班1の値が実は350 m³あるかも知れないし，あるいは280 m³しかないかも知れない。小班4，5は不明なためゼロとなっているが，本来ならばいくらかの蓄積が計上されるところである。また伐期が50年未満の小班を検索する場合，この表2からは小班3のみ該当するが，小班1は元々55年までに伐採したい小班であり，50年未満に伐採される可能性を否定できない。表1の様々な表現のなかに含まれている曖昧さが表2のように確定的な数値あるいはコードに変換された結果，データ内容までが変質してしまったことに注意しなければならない。

表2　小班別データ

連番	小班番号	枝番	樹種コード	面積 (ha)	蓄　積 (m³／ha)	伐期 (年)
1	1	1	1	3.05	300	50
2	2	1	2	1.29	261	70
3	3	1	3	45.00	150	40
4	4	1	1	3.22	0	80
5	4	2	4	3.22	0	80
6	5	1	4	8.00	0	999

註）樹種コードは次の通り。
1＝スギ，2＝ヒノキ，3＝広葉樹，4＝その他

以上，森林計画作成の基礎データのもつ曖昧さに対して，若干の検討を行った。しかし，こうした曖昧さは何も基礎データに限ったことではない。議論を単純にするため，多目的線形計画による森林計画を考えてみよう[4)]。一変数の最適化を目指す単一目的線形計画同様に，我々は幾つかの目的関数を考えなければならない（註1）。こうした様々な目的関数の1つを取り上げて考えてみた場合，例えば，「変化の最大値の最小化」は実際上，連年同量を意味するのではなく，一定の幅に納めるといった意味が強い。また，目的関数としては，最大化（最小化）のみではなく，「この山では大体…m³は確保したい」というような目的関数も考えられる（註2）。

本論文において議論するファジィ理論は，こうした曖昧なデータを取り扱う議論であり，近年様々な分野で研究が進んでいる（註3）。まず，第2章ではファジィ理論の概説と，表1のよう

な一覧表のファジィ集合による表示を論ずる。次に，こうしたファジィ集合同士の演算方法を示すことにより，曖昧なデータの集積がどのような結果を生むかを示す。第3章，第4章では，ファジィ理論を応用した森林計画を考えるにあたり，そのデータシステムとしてファジィデータベースの考え方を，また計画システムとしてファジィ線型計画について簡単に議論する。なお，具体的な適用については別稿で議論することにしたい。

2. ファジィ集合とファジィ数

表1で，曖昧さを示すものとして「長伐期」を取り上げよう。表2のようになんらか確定的な数値に変換するということは，例えば，表3のようなコード表を作ることを意味する。

表3　伐期データ

伐期区分	スギ	ヒノキ
長伐期	75	80
標準伐期	45	50
短伐期	30	35

以下，ヒノキについて考えてみる。このような変換は，伐期と伐期区分に関する図1のような1対1対応と考えることができる。

この例では，標準伐期を50年（± 5年）としておいた。例えば，伐期を47年と考えれば必ず（度合が1の割合で）標準伐期と考える，というように読めばよい。しかし，このような1対1対応では，45年では標準伐期であるが，44年では短伐期ということになる。また，林地の状況，成長状態，その他様々な条件を考慮すると，伐期区分と伐期の関係は必ずしも確定的とはいいがたい。むしろ，図2のような分布をとると考えるのが適当であると考えられる。また，こうした分布には，主観的な要素が含まれる。

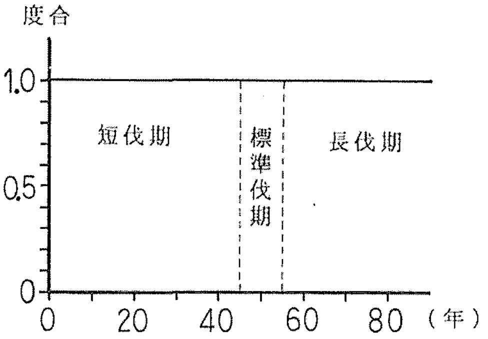

図1　短伐期・標準伐期・長伐期の表現①

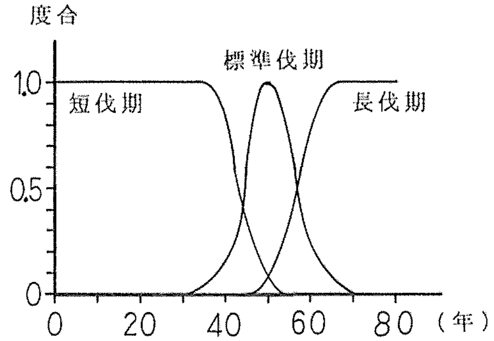

図2　短伐期・標準伐期・長伐期の表現②

標準伐期といったとき，50年の場合であれば度合1で該当し，度合は低くなるものの，40年，60年も該当する。長伐期といった場合でも，70年以上あれば度合1で該当するが，50年，60年でも度合が低くなるものの，該当する。ここでは1対1対応は成立しない。つまり55年という伐期を考えた場合，おおむね標準伐期であるが，長伐期といえなくもない，ということになる。この図2の3つの曲線は，短伐期，標準伐期，長伐期と考えられる伐期の範囲を示しており，この集合をファジィ集合（Fuzzy sets）という。このような曖昧な集合に対し，図1のような1対1対応を Crisp 集合という。ファジィ集合は曖昧な領域を示すことから，厳密な意味では集合を形成せず，通常は次のような部分集合として定義される。

全体集合Uの部分集合であるファジィ集合Aは，

$$\mu_A : \mathrm{U} \to [0,\ 1]$$

というメンバーシップ関数（Membership function）μ_A で定義され，その値を所属度（Grade）

という。先の図2は，短伐期，標準伐期，長伐期に関するファジィ集合のメンバーシップ関数を示しており，縦軸の度合は所属度と書き換えることができる。この例では，定義域が連続であるが，有限であってもよい。例えば 50 m³ 括約の蓄積データを定義域とする場合，蓄積が小さいというファジィ集合は，次のように表記する。

蓄積小＝1. 0/50＋1. 0/100＋0. 9/150＋0. 7/200＋0. 4/250＋0. 1/300

右辺第1項の1. 0/50は，蓄積が 50 m³ であれば所属度1で蓄積小，つまり，確実に蓄積が小さい，と読む。同様に，このファジィ集合は，蓄積が 100 m³ であれば，所属度1で蓄積小と考え，蓄積が 150 m³ であれば所属度0. 9で蓄積小と考える。蓄積 350 m³ 以上では所属度0となるため，定義域に {350 m³, 400 m³, 450 m³, …} があっても書く必要はない。

より一般的に記述すると，定義域が離散の時は，有限な集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$（この場合では 50 m³ 括約の蓄積集合，すなわち {0, 50, 100, 150, …}）に対し，その所属度である $\mu(u_i)$ を用いるとファジィ集合Aは，

$$\begin{aligned} A &= \mu(u_1)/u_1 + \mu(u_2)/u_2 + \mu(u_3)/u_3 \\ &= \sum \mu(u_i)/u_i \end{aligned}$$

と表現できる（$\mu(u_i)=0$ のときは省略可）。連続集合の場合は，上の式を一般化して

$$A = \int \mu(u)/u$$

と表記する。

メンバーシップ関数の具体例をあげると，図3の通りである。これは，背の「高い」「低い」を示す関数である。ファジィ理論を現実に応用していく際の問題点の一つは，このメンバーシップ関数の確定にある。

実数に曖昧さ（以下，Fuzziness と表記する場合がある）を導入すると，ファジィ数となる。表1の例では小班1の蓄積欄にある「300前後」がファジィ数の例である。つまり，「300前後」とは実数300に Fuzziness が付加したものと理解できる。ファジィ数は通常のアラビア数字の下に～を付けて表示する。ファジィ数2は $\underset{\sim}{2}$ のように示す。$\underset{\sim}{2}$ のメンバーシップ関数はどのように表現できるのであろうか。図4がその例である。

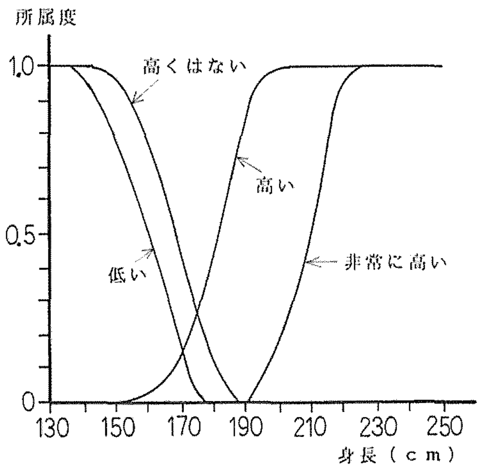

図3　メンバーシップ関数
出典）Kril and Folger[5] Figure 6. 8 (p. 288) より作成した。
原図は Norwich and Turksen による。

様々な関数を考えることができるが，どのような関数を採用するかは，そのデータによって決まるものであり，一概にいうことはできない。何等かの理由，経験などにより高めに出ることが期待されるデータの場合には，$f_3(u)$ などが考えられるし，一定の測定誤差を含むデータであれば，$f_2(u)$ などがよい。将来，線型計画法などへの応用を考えるので

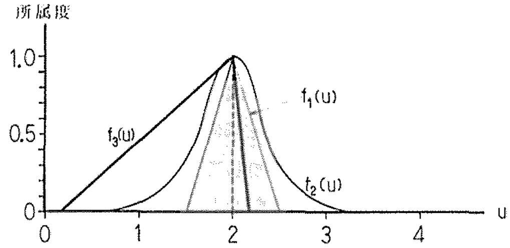

図4　$\underset{\sim}{2}$ のメンバーシップ関数

あれば，$f_1(u)$ のような線型の関数を考えておくと都合がよい。$f_1(u)$ を例に説明すると，「だいたい2」というのは1.5より大きく2.5より小さい。図4より1.5である可能性は0，1.6である可能性は0.2のように読める。逆に，所属度0.9以上の区間は，1.95～2.05と読んでもよい。3つの関数はいずれも上に凸であるが，このようなファジィ集合を凸ファジィ集合（Convex-fuzzy set）という。なお，以下の例題では，いずれも線型関数（主として，三角形タイプ）が使用されるが，これは計算の簡便性と議論をより明確にするためのものであることを断わっておく。多項式，分数関数など，様々な関数を使用できるのが，この理論の利点である。

このようなファジィ数に関しても，実数同様の演算が定義できる（註4)。$\underset{\sim}{2}$ に $\underset{\sim}{3}$ をかける演算を考えてみよう。簡単化のために，定義域を有限とし，次のような離散型のメンバーシップ関数を考える。

$$\underset{\sim}{2}=0.5/1.5+1.0/2.0+0.5/2.5$$

$$\underset{\sim}{3}=0.4/2.5+1.0/3.0+0.4/3.5$$

このとき，この2つのファジィ数の積は，

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{3} &= (0.5/1.5+1.0/2.0+0.5/2.5)\cdot(0.4/2.5+1.0/3.0+0.4/3.5)\\
&= (0.5/1.5)\cdot(0.4/2.5)+(0.5/1.5)\cdot(1.0/3.0)+(0.5/1.5)\cdot(0.4/3.5)\\
&\quad +(1.0/2.0)\cdot(0.4/2.5)+(1.0/2.0)\cdot(1.0/3.0)+(1.0/2.0)\cdot(0.4/3.5)\\
&\quad +(0.5/2.5)\cdot(0.4/2.5)+(0.5/2.5)\cdot(1.0/3.0)+(0.5/2.5)\cdot(0.4/3.5)\\
&= \min(0.5,\ 0.4)/(1.5\cdot 2.5)+\min(0.5,\ 1.0)/(1.5\cdot 3.0)\\
&\quad +\min(0.5,\ 0.4)/(1.5\cdot 3.5)+\min(1.0,\ 0.4)/(2.0\cdot 2.5)\\
&\quad +\min(1.0,\ 1.0)/(2.0\cdot 3.0)+\min(1.0,\ 0.4)/(2.0\cdot 3.5)\\
&\quad +\min(0.5,\ 0.4)/(2.5\cdot 2.0)+\min(0.5,\ 0.4)/(2.5\cdot 2.5)\\
&\quad +\min(0.5,\ 0.4)/(2.5\cdot 3.0)\\
&= 0.4/3.75+0.5/4.5+0.4/5.0+0.4/5.25+1.0/6.0+0.4/7.0\\
&\quad +0.4/5.0+0.4/6.25+0.4/7.5\\
&= \underset{\sim}{6}
\end{aligned}$$

となる。以下，定義域が分散し計算の困難を避けるため，連続関数で示されるメンバーシップ関数を用いて議論を進める。図5のようなメンバーシップ関数で示される $\underset{\sim}{2}$ および $\underset{\sim}{3}$ について，

$$\underset{\sim}{2}+\underset{\sim}{3}=\underset{\sim}{5}$$

を実行する。図より，所属度が0を越える区間は3.8から6.2までとなる。Fuzziness を考えない計算は，図のピーク部分の演算のみ実行していることがわかる。

ファジィ数同士の積と商演算の結果を示すと，図6，図7のようになる（註5)。図6は，

$$\underset{\sim}{2}^2=\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{2}=\underset{\sim}{4}$$

を示し，図7は，

$$\underset{\sim}{10}\div\underset{\sim}{2}=5$$

を示す。線型メンバーシップ関数同士の演算の結果が必ずしも線型にはならない点が注目される。ファジィ数の演算の応用例として，一定成長率で蓄積が増加していく林分（1 ha）について若干の計算例を示しておく。正確な蓄積が判明していない天然林について，現況として，

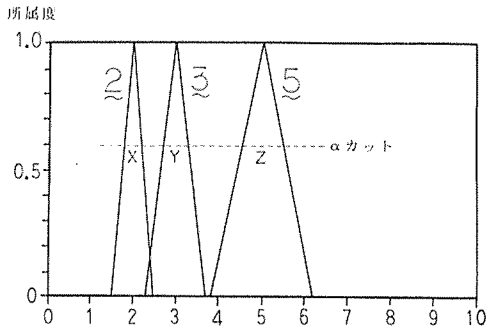

図5　ファジィ数の演算（和）

(A)「$120m^3$ に相違ない」。

(B)「よくて $120\ m^3$ といったところか。」

(C)「多分 $120\ m^3$ 位ではないだろうか。」

(D)「$120\ m^3$ はかたいところだ。」

の4タイプの曖昧な見解があり，その成長率として次の4タイプの曖昧な見解が出ているとする。

(1)「1％の成長率である。」

(2)「最大1％の成長率が可能である。」

(3)「多分1％位の成長率と思う。」

(4)「概ね1％の成長率が可能と思う。」

もしも，蓄積については $20\ m^3$ 括約，成長率については0.5％括約でデータベースを作るとしたら，どのような意見の組合せもみな「初期蓄積 $120\ m^3$，成長率1％」として等しく扱われる可能性がある。また，個人の主観に頼った調査を実施した場合，これらの見解は確定的な数字に置き換えられた瞬間に，みな同じものとして扱われる。この段階で，貴重な情報が失われている。

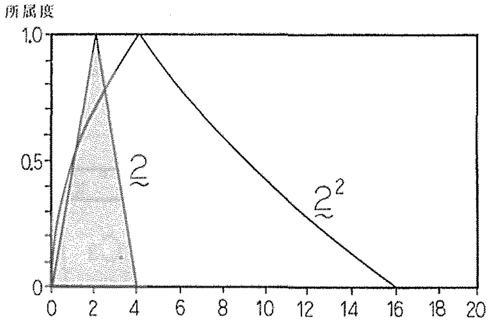

図6　ファジィ数の演算（積）

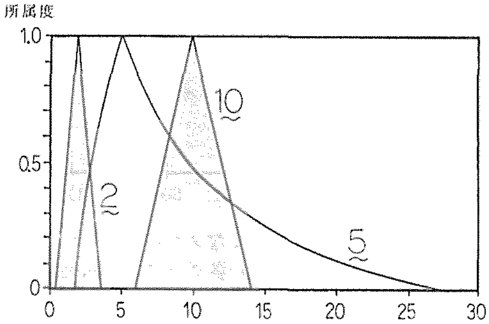

図7　ファジィ数の演算（商）

初期蓄積と成長率のメンバーシップ関数を図8のように定める。図中の記号は，上の各見解に対応する。なお，(A)および(1)のような曖昧さのない見解は，所属度が1の場合のみを考えるのであり，これは図8の斜線の三角形の頂点ただ一点を検討することになる。ここで，ファジィな見解である，(B)～(D)および(2)～(4)を用いて将来蓄積を計算すると，全部で9通りの組合せが考えられる。図9は，その各々についての計算結果を示したものである。図9のうち，真中のグラフを用いて説明すると，まず左上にある C_3 という記号が使用したメンバーシップ関数番号である。すなわち，アルファベットのCが現在蓄積の(C)を，添え字の3が成長率の(3)を採用したことを示す。すなわち，「多分 $120\ m^3$ くらいの蓄積」の山が，今後「多分1％位の成長率」を続けた場合の将来蓄積である。各グラフは3つのファジィ集合から成立するが，左から順に，現在蓄積，50年後の蓄積，100年後の蓄積を示している。

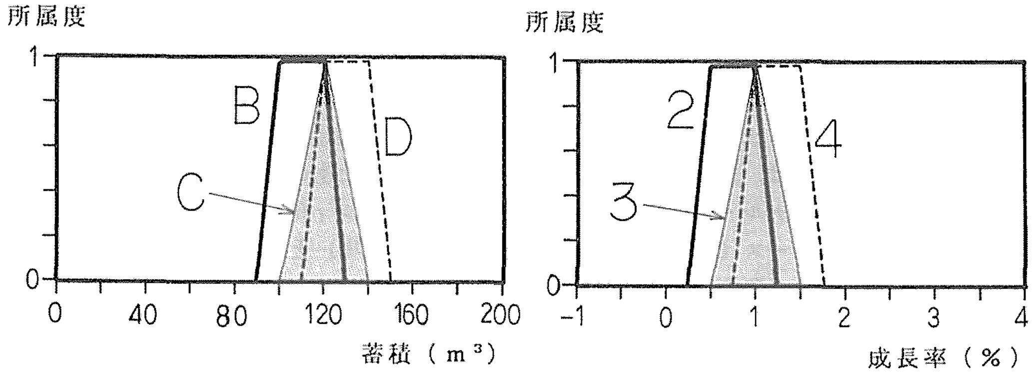

図8　初期蓄積および成長率のメンバーシップ関数

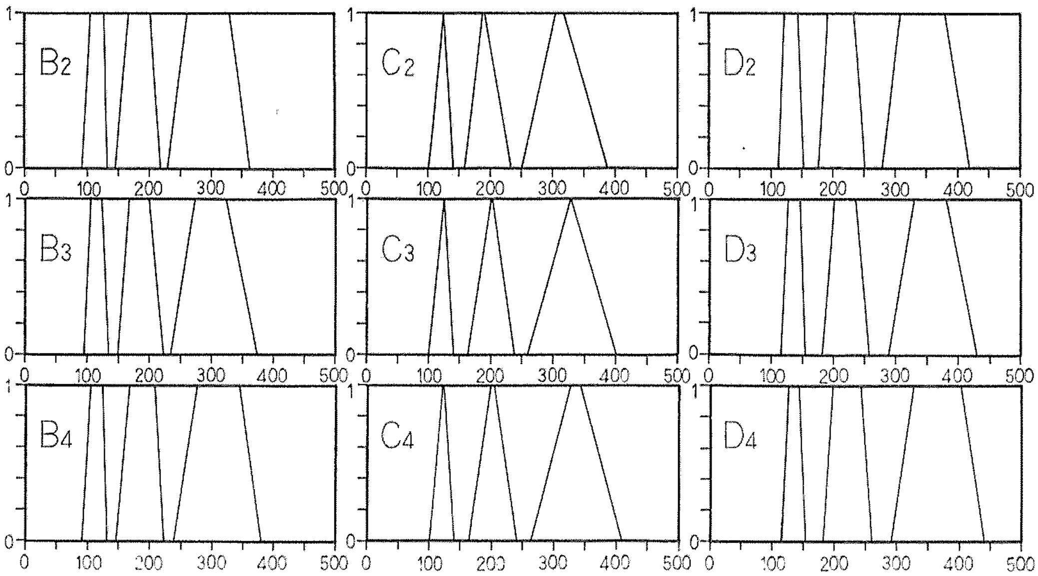

図９　様々なメンバーシップ関数に対する将来蓄積
註）各グラフとも横軸が蓄積（m^3），縦軸が所属度を示す。

以上，Fuzziness を定義域の曖昧さに限定して議論してきたが，同様のことを事象の相互関係にも適用できる。これをファジィ関係（Fuzzy relation）という。「…は…に比べてかなり大きい」「…と…は大体等しい」というのがファジィ関係の例である。

ある人工林の小班の将来蓄積がどの固定標準地 $\{y_1, y_2, y_3\}$ に相当するかを決定することを考えてみよう。確定的なデータを使用するのであれば，無理やりどれか１つに限定することになるが，ファジィ関係を使用すると，次のように示すことができる。例えば，標準地との関係について，「低すぎる」（メンバーシップ関数を $f_1(u)$ とする），「それほど低くない」（同・$f_2(u)$），「大体似ている」（同・$f_3(u)$），［高い」（同・$f_4(u)$），「高すぎる」（同・$f_5(u)$），の５項目から選択することを考える。このようなメンバーシップ関数をファジィグレードという。このとき，問題の小班蓄積 $\underset{\sim}{x}$ は標準地データを用いて，例えば，

$$\underset{\sim}{x}=f_1(u)／標準地\ y_1+f_5(u)／標準地\ y_2+f_2(u)／標準地\ y_3$$

のように表記できる。この表記の意味するところは，該当の小班蓄積は，標準地１では少なすぎて，標準地２では大きすぎて，標準地３ほど少なくない，ということである。

3.　ファジィデータベース

前章で述べたような，データのファジィ化はデータベースと密接な関係を持っている。Crisp 集合によるデータ管理は，表形式のデータベースを念頭においたものといえよう。表形式のデータベースはリレーショナル・データベースと呼ばれるが，ファジィ化したものをファジィ・リレーショナル・データベース（Fuzzy Relational Database, FRDB）という[7]。これはエキスパート・システムを設計する際の，重要なデータベースである。

データベース利用の例として，第１章で使用した表１，表２を使って簡単な検索を実行してみよう。「伐期45年の小班はどこか」という問いに対して表２で示されるようなデータベースで検索を実行すれば該当する小班は存在しない。しかし，元来のデータは表１であるから，「55年ま

で」とする小班1および「40年前後」とする小班3が該当する可能性を有するのである。ファジィな検索である「伐期が45年前後の小班はどれか」という質問であれば，表2でもある程度の検索は可能となる。以上，検索を例に説明を進めたが，表1をそのままの形で入力できるようなデータベースが森林計画の分野においては必要なのではないかと考えられる。

データベースにおける曖昧さの発生は，入力データそのものが曖昧である場合と，検索等の質問項目に曖昧さがある場合に分けられる。まず，前者から議論を始める。この問題については馬野[8]によって可能性分布一関係モデルが示されている。ここでは表1のようなデータが取り扱えるように設計されている。このモデルによれば，以下のような課題に答えることが可能と思われる（註6）。①属性値として｛スギ，ヒノキ｝のような記述ができる。これはスギかヒノキかどちらかであることはわかっているのだが，どちらの可能性が高いかわかっていない場合である。これは単に｛針葉樹｝とするよりも，情報量が大きい。②属性値として｛不明｝をとることができる。これは該当する小班が存在しないのではなく，あらゆる樹種である可能性が等しいような可能性分布を考えるというものである。③属性値として｛200程度｝や｛300以下｝のようなファジィ集合を直接与えることができる。天然林のデータでは正確な計測こそ実施していないものの，このような形で大体の蓄積を推定することのできる林分は相当あるように思われる。④属性値として｛なし｝を与えることができる。これは調査していない，あるいははっきりしない，ということではなく存在しないことを示す。つまり，すべての樹種の可能性分布がゼロであると解釈できる。⑤｛null｝を含めているので，「調べたけれども“わからない”か“なし”かすらわからなかった状況」[8]を記述できる。

次にファジィな質問に対する処理法について簡単な例を示しておく。Tahani は一致度という考え方を用いて検索することを提案した。馬野[8]の例題説明を援用し，表1を使用して一致度検索を実行してみよう。この表よりスギかヒノキで，250 m^3 位の蓄積を持つかあるいは長伐期を考える小班を検索することを考える。この検索項目のうち，「250 m^3 位の蓄積」，「長伐期」という部分がファジィな質問である。一定の書式に無理に加工してしまった表2からはこのファジィ検索を直接実行することはできない（註7）。各データ属性（樹種・面積・蓄積・伐期）に関して，それぞれメンバーシップ関数が与えられているものとする。

まず，小班1について検索を始める。樹種は明らかに該当し，所属度は1となる。蓄積は，データが「300 m^3」となっており，そのメンバーシップ関数を0.4としよう。伐期は「55年まで」であるから，所属度は0としよう。小班1の検索項目に対する一致度は，

$$\gamma_1 = \min\{\text{樹種の Grade},\ \max\{\text{蓄積の Grade, 伐期の Grade}\}\}$$

で与えられる（註4）。すなわち，

$$\gamma_1 = \min\{1.0,\ \max\{0.4,\ 0\}\} = 0.4$$

となる。同様に計算すると，小班2～5の一致度はそれぞれ，

$$\gamma_2 = \min\{1.0,\ \max\{0.9,\ 0.9\}\} = 0.9$$

$$\gamma_3 = \min\{0,\ \max\{0,\ 0\}\} = 0$$

$$\gamma_4 = \min\{0.8,\ \max\{0.2,\ 1.0\}\} = 0.8$$

$$\gamma_5 = \min\{0.4,\ \max\{0.2,\ 0.2\}\} = 0.2$$

となり，この検索に対するファジィな解は，

0.4／小班1＋0.9／小班2＋0.8／小班4＋0.2／小班5

というファジィ集合で表現することができる。すなわち，小班2と小班4とが検索項目にかなり一致を示し小班1と小班5とが一致している可能性が残っている。確定的な検索のもとではこの解のメンバーシップ関数の所属度が1のもののみが検索される。上記のようなファジィな解に対

して，どのような決定を行うかは，利用者の主観的な判断に委ねられる（降水確率に対して，どのような行動を取るかを想起すればよい)。

以上述べてきたようなファジィデータベースは現在のところ実用化には至っていない。しかしながら，これからデータベースを作る場合は，こうしたファジィデータベース設計の可能性を考慮した調査方法が考えられてよいように思われる。つまり，無理に固定的書式に現実を合わせる必要はなく，より柔軟な記述を容認するデータベースを作成し，当面の間はデータを表２のように変換して用いておくのが望ましいように思われる。

4.　ファジィ線型計画

前の２つの章では，森林計画のデータを中心にファジィ化に関する議論を行った。本章では，ファジィな計画について，従来から研究が進んでいる線型計画を取り上げ，検討していく。

以下，ファジィ線型計画問題として幾つかのパターンを述べるが，まず最初に，制約条件に曖昧さを導入することを考えてみよう。例えば，「林道費はだいたいのところ…円以下」というような制約である。もっとも，これだけでは確率的線型計画法（註８）と同じ発想にとどまる，違いは不確かさの表現方法のみである。ファジィ計画法の長所はむしろ次のような場合にある。目的関数に曖昧さを導入して「年伐量は最低…m³ 前後は必要で，しかも前年に比して大きくは変化しないように」などという条件がこれに相当する。また，線型計画の不等号の全てに曖昧さを導入する場合の定式化も行われている[9]。

線型計画問題は，通常，

$\max f(x)$　　　　目的関数

s. t.　$Ax \leqq b$　　　　制約関数

のように表現される。制約式にファジィ関係を導入すると，

$Ax \lesssim b$

となる。ここで$\lesssim$はファジィ不等号を表す。すなわち，Ax がだいたい b 以下になるように，という制約条件である。確定的な制約条件の境界部をぼかしただけのものであるが，解が相当異なる場合も出てくる。制約式に曖昧さを導入した結果，従来の線型制約式ではわずかに満たせない条件があったが実は最大値を実現する点を見いだす可能性がある。メンバーシップ関数としては

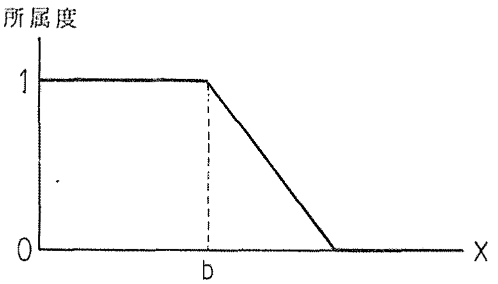

図10　ファジィ制約式の考え方

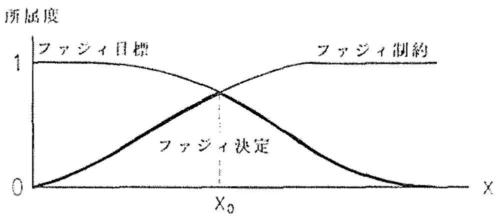

図11　制約・目標・決定の相互関係
出典）Bellman and Zadeh[10] の Figure 1 (p. 149) に一部加筆した。

図10に示すようなものを考えることができる。このようなメンバーシップ関数を用いた場合，ファジィ線型計画問題は通常の線型計画問題に帰着できる。

次に目的関数をファジィ化してみよう。例えば，

$f(x) \lesssim c$

のような例をあげることができる。これは，目的関数の値がだいたい c 以下になるように，ということである。

ところで，実際の計画作成の際には，目的関数そのものが必ずしも明確ではない場合が少なくない。「少なくとも赤字にはならないように」とか，「この山なら総収穫が…m^3 はほしい」というような目的関数が設定されることも多い。こうした曖昧な目的を扱うことができるのがこの方法の利点である。

以上，線型計画にファジィ関係を導入した場合の例であるが，目的関数及び制約関数の定数項にファジィ数を導入することもできる。すなわち，

$\max\ \underset{\sim}{D}x \lesssim \underset{\sim}{c}$　　目 的 関 数

$\mathrm{s.t.}\ \underset{\sim}{A}x \lesssim \underset{\sim}{b}$　　制 約 関 数

のような場合である。最初に示した通常の線型計画と違い，目的関数と制約関数の式が全く同じ形式となることに注目してほしい。こうなると2つの関数を区別する必要は数学的取扱いの上からは必要がなくなってくる（註9）。線型計画への応用に限らず，ファジィ決定（Fuzzy decision）においては，制約条件，目標関数，意思決定の3者の間には図11のような関係が見られる。

すなわち，意思決定は目標と制約の共通集合として与えられる。上の例では $x=x_0$ なる点が最も高い所属度を与える点であり，最大決定（Maxmizing decision）と定義される。ファジィ制約のもとで，ファジィ目的関数の最大化を求める線型計画において目的関数と制約関数の区別がなくなるのはこのためである。

それでは Fuzziness をどのようなところに導入すればよいのであろうか。注意が必要な点はファジィ集合を導入しても方程式そのものは確固たるものである点である。つまり，単に線型方程式の係数が変化するだけであって，関係の捉え方そのものを曖昧にしているわけではない[11]。この係数に関して，何等かの調査等によって分布が推定できるのであれば，Randomness の概念で処理することが可能であるが，この係数がただの1度しか起きないことや，調査に膨大な費用を要する場合や，計画担当者の主観ないしは漠然とした希望を込めたいときには，係数は確率を成さない。このような場合に有効である。なお，すべての係数をファジィ化してしまうと「まったくあいまいで何もわからない」という「あいまいさの爆発」[12] が起こり，モデル計算する意味が失われてしまう。また，ファジィ化された変数が余りに多いと，メンバーシップ関数をどのように定めるかという面からも問題が出てくる。

さらに目的関数を複数化し，目的関数間のトレード・オフを扱う多目的線型計画問題に Fuzziness を導入する研究[13][14]が近年進んでいるが，重要な点は特定のメンバーシップ関数（必ずしも線型でなくともよい，ある種の非線型式でも可能）を導入することによって通常の線型計画問題に帰着させる点にある（註10）。複数の種類のメンバーシップ関数の場合についてはまだ十分に研究が進んでいない。また，木平によって小班別収穫予定に応用された0－1線型計画問題のファジィ化もすでに検討されている[15]。

本章の最後に，Zimmermann[16] の例題を示しておく（註11）。今，次のような二目的線型計画を考える。

$\mathrm{Max}\ z_1(x) = -x_1+2x_2$　　貿 易 関 数（目的関数1）

$\mathrm{Max}\ z_2(x) = 2x_1+x_2$　　利 益 関 数（目的関数2）

$$\mathrm{s.t.}\quad \left.\begin{aligned} -x_1+3x_2 &\leqq 21 \\ x_1+3x_2 &\leqq 27 \\ 4x_1+3x_2 &\leqq 45 \\ 3x_1+\ x_2 &\leqq 30 \\ x_1,\quad x_2 &\geqq 0 \end{aligned}\right\} \text{制 約 関 数}$$

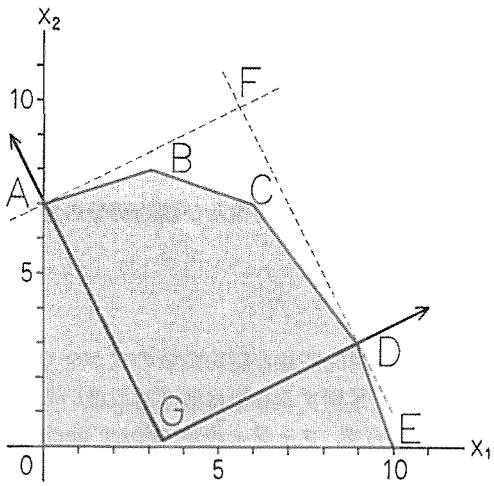

図12　二目的問題の制約条件
出典) Zimmermann[16) の Figure 12.7 (p. 247) に一部加筆した。

各制約条件式をグラフ化すると，図12のようになる。

これは通常の多目的線型計画の例題である。第１の目的関数の最大化のみを追求すればＡ点が最適となり（最適点では $z_1(x)=14$, $z_2(x)=7$)，第２の目的関数のみを追求すればＤ点が最適となる（最適点では $z_1(x)=-3$, $z_2(x)=21$)。つまり，貿易関数のみを考えればＡ点が，利益関数のみを考えるとＤ点が最適となる。Ｆ点は完全最適点 (Complete optimal solution) である。第１の目的関数が最大値 ($z_1(x)=14$) をとり，第２の目的数も最大値 ($z_2(x)=21$) をとる点である。目的関数が互いに相競合する場合には，完全最適解は制約条件のなかには入ってこない，理想の点である。逆に，２つの目的関数の最小値の組合せ ($z_1(x)=-3$, $z_2(x)=7$) がＧ点である。

ここで，目的関数を次式のようにファジィ化する。すなわち，両関数値をなるべく多くなるように，考えることにしよう（「なるべく」という部分がファジィな目的となる)。

Max $z_1(x)\underset{\sim}{=}-x_1+2x_2$　貿易関数（目的関数１）

Max $z_2(x)\underset{\sim}{=}2x_1+x_2$　利益関数（目的関数２）

メンバーシップ関数を導入する。まず，貿易関数について

$$\mu_1=\begin{cases}0 & z_1(x)\leqq -3\\ (z_1(x)+3)/17 & -3<z_1(x)\leqq 14\\ 1 & 14<z_1(x)\end{cases}$$

のような関数を考える。これは，貿易収支の最大値（Ａ点，$z_1(x)=14$）より大きい点では所属度として１を与え，最低値（Ｅ点，$z_1(x)=-3$）以下では所属度として０を与え，中間を直線で結んだものである（図10の具体例である)。同様に，利益関数についても

$$\mu_2=\begin{cases}0 & z_2(x)\leqq 7\\ (z_1(x)-7)/14 & 7<z_2(x)\leqq 21\\ 1 & 21<z_2(x)\end{cases}$$

のようなメンバーシップ関数を与える。このとき，先の二目的線型計画は次式のような通常の線型計画問題に帰着させることができる。

Max λ

s. t.　$\lambda\leqq(z_1(x)+3)/17$

$=-0.05882x_1+0.117x_2+0.1764$

$\lambda\leqq(z_2(x)-7)/14$

$=0.1429x_1+0.714x_2-0.5$

$21\geqq -x_1+3x_2$

$27\geqq x_1+3x_2$

$45\geqq 4x_1+3x_2$

$30 \geqq 3x_1 + x_2$

$x_1, x_2 \geqq 0$

5. おわりに

最後に，森林計画問題についてこのような曖昧さを検討する利点をまとめておく。

第1に，森林整備の主たる目標が人工林一辺倒ではなくなってきたことである。従来の森林簿というデータ管理方式は基本的には人工林を念頭においたものである。天然林については，雑とされ，一応，何等かの数字が記入されているが，それはあくまでも人工林データの集計システムのなかに適合するようデータを改変してあるといえる。また，人工林といっても，様々な施業法が進められており，従来からの収穫表のみに頼った計画システムは大きく揺らいでいる。多様な自然の生産物を確定的に扱っていくデータ管理の方法に多くの問題が生じてきているように思われる。今後，我が国が「多様な森林資源の整備」[17] を図っていくのであれば，森林データの管理方法をある特殊の目的のシステムに無理に適合させるのではなく，森林という対象に即した，データ管理システムを構築していく必要がある。その場合，森林のもつ様々な曖昧さを捨象してしまうのではなく，より積極的に残していくことが必要であると思われる。

第2に，計画の目的がもはや単に木材生産の最適化のみを目指すものではなくなってきた点に関係する[18]。もちろん，木材生産の場合でも質的側面は重要であるが，数式によって記述される量的側面のみでも一定の議論が可能と思われる。しかしながら，森林の様々な目的相互のトレード・オフ問題を扱う場合，曖昧さを排除した確定的な関係のみ検討していくことは困難が予想される。我々は何等かの主観的要素（註12）をも含む新しい尺度を必要としている。また，森林計画の場合，目的と制約条件の区別は必ずしも明確ではない。このような分野では，目的，制約をファジィ目的，ファジィ制約と考えるファジィ意思決定の果たす役割が大きいと考えられる。

第3に，近年，様々な分野でエキスパート・システムの構築が進んでいる。エキスパート・システムでは専門家のもつ経験的知識のような，曖昧なデータを扱うことができる。農林業分野でも応用が進み始めている。ファジィ理論は，知識の表現方法として，また推論の道具として有用である（註13）。森林計画の作成途上においては，必ずしも単純な数式では表現することができない多くの専門家の経験が重要な役割を果たしていると考えられる。今後，森林計画の分野でエキスパート・システムを構築していく際に多くの応用が進んで行くものと思われる。

註 1）森林計画問題に多目的線型計画法を適用した Hallefjord[19] らの研究では，以下の目的関数が設定されている。①分期収穫量（丸太材積）の変化の最大値の最小化，②分期収穫量（立木材積）の変化の最大値の最小化，③第1分期の丸太材積の最大化，④分期施肥量の最小化，⑤計画期間全体における立木材積の最大化，⑥分期ごとの間伐面積の最小化

註 2）材積を x，目標水準を x_0 とすれば，

$$\min\ z = f(x - x_0)$$

なる目的関数を設定することができる。多目的線型計画であれば，この材積と目標水準の差（達成度 z）が他の最適条件とのトレード・オフの対象となる。

註 3）ファジィ理論は，Zadeh[20] によって研究が開始されたまだ新しい分野である。意思決定への応用は Bellman & Zadeh[10] による最適化決定の概念が知られている。もともとは，「美人」に関する判断基準が曖昧であることに着目した研究で，その実用化では日本が最も進んでいる。1987年開通した仙台市営地下鉄への応用，熊本大学で開発の進むファジィコンピューター等の応用が特に知られている[21]。本論文のうち，ファジィ理論の基礎的定義は水本[22] に負うところが多い。国内では，初期の図書[23][24] に加え，近年，様々な研究書が出版されている[11][25]。

註 4）ファジィ集合に関しても，基本演算（包含・交わり・結び・補集合）が成立する（例えば，水本[25]などを参照)。ファジィ集合の積演算（論理積）は，

$$x \wedge y = \min\{x, y\}$$

となり，和演算（論理和）は

$$x \vee y = \max\{x, y\}$$

となる。

註 5) ファジィ数に関して，α カットを定義ができる。α カットとはメンバーシップ関数のうち所属度が α 以上の値を取るような区間をいう。図4の $f_1(u)$ を例に取り上げると，所属度0.8以上の区間は [1.9, 2.1] である。メンバーシップ関数が凸性を満たさない場合には，この区間が複数ケ所に分かれる。ファジィ集合Aおよび同Bの任意の演算＊の結果を，

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} * \underset{\sim}{B}$$

とすると，それぞれの α カット集合である A_α, B_α, C_α について，

$$C_\alpha = A_\alpha * B_\alpha$$

が成立する。例えば，図5の和演算では，点線部が所属度0.6の α カットである。点線上の区間 x と区間 y に和演算を施した結果が区間 z である。どのようなメンバーシップ関数を持つ場合でもこうして α カットをとれば区間同士の演算に還元できる。メンバーシップ関数が特定のタイプの場合には近似式が導出されている（三角形タイプのメンバーシップ関数の場合については水本[22]を参照）。

註 6) 以下，本文中で示す5つの記述形式は馬野[8]の209～210頁の例題説明を森林への適用を念頭に書き直しただけのものである点を断わっておく。また，本論文の表1も馬野[8]の例題（210頁）を参考にして作成したものである。

註 7) 質問を「スギかヒノキで，240 m³～260 m³ の蓄積をもち，伐期が70年以上の小班はどれか」というようにファジィな質問を具体的に指定すれば一応の検索は可能である。しかし，もともと「長伐期」というデータを「80年」に書き換えたものを対象に，こうした具体的検索を実行するのは困難が生ずる。

註 8) 線型計画に不確かさを導入する方法として，確率的線型計画の議論が知られている。確率的線型計画問題とは，制約条件を確率的に満たし，かつ目的関数の平均値が最大になるような解を見いだす問題である[26]。次のような確率的線型計画を考える。

max	$f(x) = cx$	目 的 関 数
s. t.	$Ax \leqq b$	制 約 関 数

c のみに確率変数が含まれる場合には，目的関数の何を最大化するかによって，期待値最大化問題，分散最小化問題，確率最大化問題（目的関数値が一定値以上になる確率の最大化），下限最大化問題などに分けることができる[27]。黒川[28]は，この確率変数 c として面積当り収穫材積を，x として伐採計画（面積）を採用した長期計画モデルを提案した。この例では，第 i 分期における収穫材積が，すべて同じ多変量正規分布に従うことを仮定し，総収穫材積 cx の分散最小化問題に帰着させている。

註 9) 線型計画では通常，目的関数の最大化（あるいは最小化）が図られるが，初期の研究においては目的関数は設定されておらず，解を限定するための道具として後から導入されたといわれる[29]。

註10) 多目的問題では，パレート最適解[4]を検討するが，ファジィ多目的計画では直接パレート解を見いだすことができない（ファジィ数の大小関係は不等号で示すことができないため）。Dubois[30]らは「しきい値 τ」を利用して大小関係を定義している。これを利用した「τ—パレート最適解」の概念が提案されている[31]。

註11) Zimmermann[16]の245～249頁の例題を引用した。図10は同・247頁の Figure 12-7 をもとに作成した。なお，この例題は坂和[13]の198～200頁にも引用されている。解は最終的に，$x_1 = 5.03$, $x_2 = 7.32$ となる。解を見いだすシンプレックス表については坂和[13]の表11.1（199頁）を参照のこと。

註12) 統計理論の中に，主観確率（Subjective probability）を用いるベイズ理論の考え方がある。「この立場では，未知のパラメータがあればかならずその分布を想定し，観測によって得られるデータとベイズの定理によってこの事前分布を事後分布に変換することで統計のすべてがつくされる」[32]と考える（林業への応用は松下[33]）。ベイズの定理を拡張した，ファジィ・ベイズ法則を使用すれば，確率的情報と同様に，ファジィ情報から事後確率を得ることができる[24]。

註13) エキスパート・システムの農林業への応用に東京大学の「トマト促進栽培管理システム」[34]がある。このシステムでは，事実の確実性を一種のメンバーシップ関数で表現するように設計されている。林業への応用には，酒井[35]による搬出作業方法の選択問題がある。ここでは，集材距離，地形傾斜，集材材積をメンバーシップ関数で表示し，「総合的な好適度」を3つのメンバーシップ関数の積演算で表現している。

引 用 文 献

1) 南雲秀次郎：線型モデルによる収穫予定理論に関する研究．名大演報．**5**．138～235，1970

2) 黒川泰亨：林業試験場プログラミング報告(4)0-1整数計画法．林試研報．**281**．113～150，1976

3) 木平勇吉：0-1線型計画法による小班別収穫予定．信大演報．**19**．1～66，1982

4) 松下幸司：森林計画に関する研究—多目的計画法の応用について—. 京大演報. **59**. 99～111, 1987
5) KLIR G. J. and FOLGER T. A. : Fuzzy Sets, Uncertainty, And Information. Prentice Hall. New Jersey. 355pp, 1988
6) NORWICH A. M. and TURKSEN I. B. : A model for the measurement of membership and the consequences of its empirical implementation. Fuzzy Sets and Systems. **12**. 1～25, 1984
7) KANDEL A. : Fuzzy Mathematical Techniques with Applications. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 274pp, 1986
8) 馬野元秀：データベース（文献11所収，第4章）. pp 203～216
9) 田中英夫・浅居喜代治：ファジィ関数による線型計画問題の定式化. システムと制御. **25**(6). 351～357, 1981
10) BELLMAN R. and ZADEH L. A. : Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Science. **17B**. 141～164, 1970
11) 寺野寿郎・浅居喜代治・菅野道夫：ファジイシステム入門. オーム社. 東京. 255pp, 1987
12) 広田　薫：ファジイ推論. オペレーションズ・リサーチ. **32**(9). 591～597, 1987
13) 坂和正敏：線型システムの最適化. 森北出版. 東京. 181～205, 1984
14) 坂和正敏：非線型システムの最適化. 森北出版. 東京. 142～159, 1986
15) ZIMMERMANN H.-J. and POLLATSCHEK M. A. : Fuzzy 0-1 Linear Programs. Tims/Studies in the Management Sciences **20**. 133～145, 1984
16) ZIMMERMANN H.-J. : Fuzzy Set Theory - and Its Application. International Series in Management Science/Operataions Research. Kluwer-Nijhoff Publishing. Hingham. 363pp, 1985
17) 森林計画研究会：新たな森林・林業の長期ビジョン. 地球社. 東京. 415pp, 1987
18) 熊崎　実：森林計画に新しい息吹きを—林学の再生に賭けて. 林業技術. **549**. 2～6, 1987
19) HALLEFJORD, A., JORNSTEN, K. and ERIKSSON. O. : A long range forestry planning problem with multiple objetives, European Journal of Operational Research. **26**(1). 123～133, 1986
20) ZADEH, L. A. : Fuzzy Sets. Information and Control. **8**. 338～353, 1965
21) 日本経済新聞社：「あいまいさ」の科学・ファジイ理論，応用分野拡大欧米をリード. 同新聞, 1987—7—28
22) 水本雅晴：最近のファジイ理論. 情報処理. **29**(1). 11～22, 1988
23) 西田俊夫・竹田英二：ファジイ集合とその応用. 森北出版. 東京. 164pp, 1978
24) 浅居喜代治・Negoita C. V. : ファジイシステム理論入門. オーム社. 東京. 218pp, 1978
25) 水本雅晴：ファジイ理論とその応用. サイエンス社. 東京. 359pp, 1988
26) 田中英夫：ファジイ数理計画問題. オペレーションズ・リサーチ. **26**(12). 712～720, 1981
27) OR 事典編集委員会：OR 事典. 日科技連出版社. 東京. pp 221～223, 1975
28) 黒川泰享：リスク・プログラミングとしての林業経営計画モデル. 日林関西支講. **32**. 157～159, 1981
29) 田中英夫：ファジイ数理計画法（文献11所収，第7章）. pp 119～129
30) DUBOIS, D. and PRADE, H. : Fuzzy Real Algebra-Some Results. Fuzzy Sets and Systems. **2**. 327～348, 1979
31) 矢野均・坂和正敏：ファジィパラメータを含む多目的問題. Journal of the Operations Research Society of Japan. **29**(1). 21～42, 1986
32) 赤池弘次：統計的推論のパラダイムの変遷について. 統計数理研究所彙報. **27**(1). 5～12, 1980
33) KOJI MATSUSHITA : An Economic Model for Forestry - Application of Bayesian Analysis. presented at 18th IUFRO World Congress, 1986
34) 農林水産省：人工知能と農業. 農林統計協会. 東京. 185pp, 1986
35) 酒井徹朗：林業におけるエキスパートシステムに関する研究（I）. —搬出作業方法選択プロトタイプシステムについて—. 第99回日本林学会講演配布資料, 1988

Résumé

Traditional methods of forestry planning are deterministic. But there are many kinds of "fuzziness" in forest management, so these traditional methods are not acceptable to foresters. The purpose of this paper are : (1) to clarify the problems of using only the crisp sets for mathematical model of forestry planning, (2) to discuss the utilization of fuzzy theory to forestry planning.

The following three points are the problems in using crisp sets.

1) In case of natural forests, we can not calculate the exact growing stock by using simple method. But, foresters can point out the roughly figure, for example, "almost 300 m^3", "at least 250 m^3", "very tall", and so on. Traditional models can not use these useful information.

2) Most of forests have multiple objects including log production, but we can not always state these objects in figures (for example, in case of recreation and scenic beauty). Traditional model did not deal with these "fuzzy" data, so even if these functions are relatively important, we can not help ignoring them.

3) Planners of forestry planning have often some kinds of expectations. But in most cases, these expectations are "fuzzy", so programmers can not make mathematical model of forestry planning. In traditional models, we can use only "probability".

I can suggest the following two applications of fuzzy theory.

1) To make a computer system easy to use, the data base system is most important. On the other hand, fuzzy sets is suitable for expressing forests contents. So, fuzzy relational data base system (FRDB) have many merits in forestry.

2) If the forest have many objects and they are in conflict each other, we have to pay attention to the trade-off relation. For this problem, the multiple objective programming (MOP) is useful. Simple example of Fuzzy multiple objective linear programming is shown in this paper.